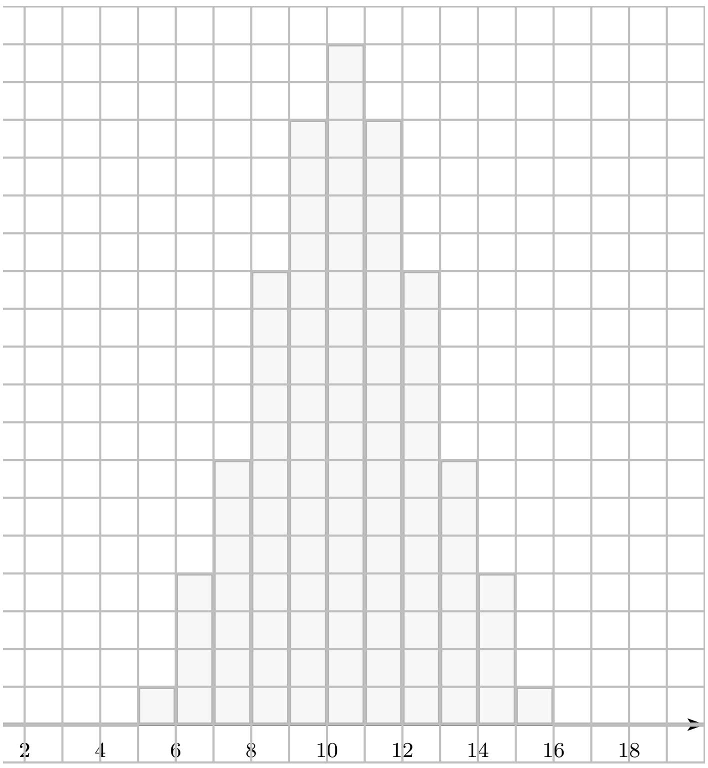
1 Un peu d'histoire

L'étude des phénomènes aléatoires a commencé avec l'étude des jeux de hasard. Ces premières approches sont des phénomènes discrets, c'est-à-dire dont le nombre de résultats possibles est fini ou dénombrable. De nombreuses questions ont cependant fait apparaître des lois dont le support est un intervalle tout entier. Certains phénonènes amènent à une **loi uniforme**, d'autres à la **loi exponentielle**.
Mais la loi la plus " présente " dans notre environnement (phénomènes naturelles) est sans doute la **loi normale** : les prémices de la compréhension de cette loi de probabilité commencent avec Galilée lorsqu'il s'intéresse à un jeu de dé,notamment à la somme des points lors du lancer de trois dés. La question particulière sur laquelle Galilée se penche est : Pourquoi la somme 10 semble se présenter plus fréquemment que 9 ?
Il publie une solution en 1618 en faisant un décompte des différents cas. Par la suite, Jacques Bernouilli, puis Abraham de Moivre fait apparaître la loi normale comme loi limite de la loi binomiale, au xviiie siècle. Pierre-Simon Laplace et Friedrich Gauss poursuivront leurs travaux dans ce sens.
La planche de galton (approche graphique de la loi normal avec la courbe de Gauss) met en évidence deux résultats fondamentaux de la théorie des probabilités : **la loi des grands nombres** et **le theorème central limite**.

Lien internet : Planche de Galton

2 Loi à densité sur un intervalle borné

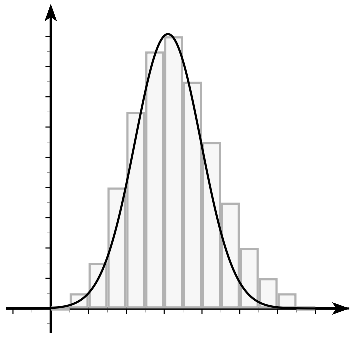
Exemple 1 :



L'histogramme ci-dessus représente la loi binomiale de paramètre $n = 20$ et $p = 0,5$. On peut en utilisant le graphique donner la probabilité suivante $P(X < 8)$ en calculant l'aire sous la courbe entre les abscisses $x = 0$ et $x = 8$ sachant que l'aire totale sous la courbe vaut 1.
Compléter $P(X < 8) = \cdots\cdots$.

En augmentant la valeur de n sans changer la valeur de p on peut approcher cette courbe en escalier par une courbe continue qui permet de calculer des probabilités en utilisant l'aire sous la courbe. On dit que cette courbe continue est la représentation de la densité de probabilité sur l'intervalle [0 ;20].

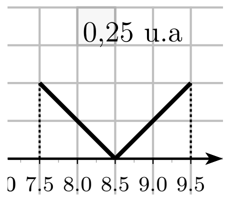
Voici un exemple ci-dessous :



Exemple 2 :

Un entrepôt accueille tous les matins des camions de livraison sur un créneau horaire de deux heures d'ouverture , de 7h30 à 9h30. On s'intéresse à l'heure d'arrivée d'un camion qui se présente tous les matins à l'entrepôt aux heures d'ouverture.

On admet que la probabilité que ce camion arrive dans un intervalle de temps donné $[t_1; t_2]$ est égale à l'aire du domaine compris entre l'axe des abscisses, les deux segments tracés ci-contre et les droites verticales d'équations $x = t_1$ et $x = t_2$. Ainsi la probabilité d'arrivée du camion entre 8h00 et 9h00 est égale à 0,25.



Compléter $P([9; 9,5] = \cdots\cdots$.

Compléter $P([7,5; 9] = \cdots\cdots$.

Définitions : Soit f une fonction positive et continue sur un intervalle $[a; b]$ telle que $\int_a^b f(t)\mathrm{d}t = 1$.
On définit une loi de probabilité en posant $P([c; d]) = \int_c^d f(t)\mathrm{d}t$ avec $a \leqslant c \leqslant d \leqslant b$.

On dit que f est la densité de cette probabilité.

Si une variable aléatoire X peut prendre toutes les valeurs d'un intervalle $[a; b]$ de $\mathbb{R}$, on dit que X est une variable aléatoire continue.

On dit qu' une variable aléatoire X suit une loi de densité f sur un intervalle $[a; b]$ si pour tout u et v deux valeurs dans $[a; b]$ avec $u < v$, la probabilité de $u \leqslant X \leqslant v$ est égale à $\int_u^v f(x)\mathrm{d}x$.

Remarque :
La probabilité d'une valeur isolée est nulle : $\mathrm{P}(X = w) = \int_w^w f(x)\mathrm{d}x = 0$.
Donc on a : $\mathrm{P}(u \leqslant X \leqslant v) = \mathrm{P}(\ u < X < v)$.

Propriété : Espérance et Variance
Soit une variable aléatoire X suit une loi de densité f sur un intervalle $[a; b]$.
L'espérance de X notée $E(X)$ est donnée par : $\int_a^b xf(x)\mathrm{d}x$.

La variance de X notée $V(X)$ est donnée par : $\int_a^b (x - E(X))^2 f(x)\mathrm{d}x$.

3 Loi uniforme sur $[a;b]$

Définition :
La loi uniforme sur $[a;b]$ est la loi de probabilité de densité constante définie sur $[a;b]$ par la fonction f telle que $f(t) = \dfrac{1}{b-a}$.

Cas d'utilisations de la loi uniforme : cette loi modélise un phénomène uniforme sur un intervalle donné. La notion d'uniformité vient du fait que la probabilité qu'une valeur tirée d'une loi uniforme soit dans un certain intervalle ne dépend pas de la position de l'intervalle, mais uniquement de sa longueur. On l'utilise généralement lorsque la situation se ramène à choisir au hasard un réel dans un intervalle $[a;b]$.

Exemples d'expérience :
Epaisseur de pièces mécaniques, durée de trajet, instant d'arrivée d'un bus, tirage d'un nombre au hasard dans un intervalle $[a;b]$,....

Propriétés :

1. Si $a \leqslant c \leqslant d \leqslant b$ alors $P([c;d]) = \dfrac{d-c}{b-a}$.
2. L'espérance de la loi uniforme sur $[a;b]$ est :

   $\mathrm{E} = \int_a^b \dfrac{t}{b-a}\mathrm{d}t = \dfrac{a+b}{2}$. **Il s'agit donc de la moyenne des bornes de l'intervalle $[a;b]$.**

Exemple 1 :

On choisit, au hasard, un réel dans l'intervalle $[0;20]$. On note X la variable aléatoire correspondant à ce réel.

1. Donner la fonction densité.
2. Quelle est la probabilité que ce réel soit entre 3 et 12 ?
3. Quelle est la probabilité que ce réel soit 10 ?
4. On note A l'événement : $3 < X < 7$ et B l'événement : $4 < X < 10$. Calculer les probabilités $\mathrm{P}_A(B)$ et $\mathrm{P}_B(A)$.

Exemple 2 :

Une enquête sur la durée du trajet domicile- lieu de travail de tout le personnel d'une grande entreprise révèle que celle-ci est comprise entre 0,5h et 2,5h.

On interroge au hasard les salariés sur leur temps de transport ; et on appelle X la variable aléatoire égale à la durée du trajet d'un salarié.

On admet que X sur la loi uniforme sur l'intervalle $[0,5;2,5]$.

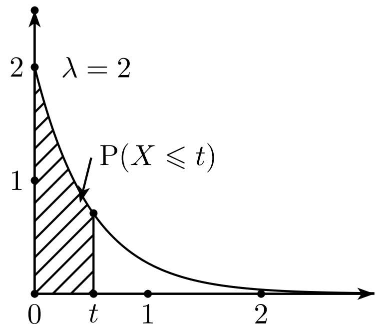
1. Représenter la fonction densité de cette loi uniforme.
2. Quelle est la probabilité que la durée du trajet soit comprise entre trois quarts d'heure et une heure et quart ?
3. Calculer la durée moyenne du trajet domicile-entreprise.

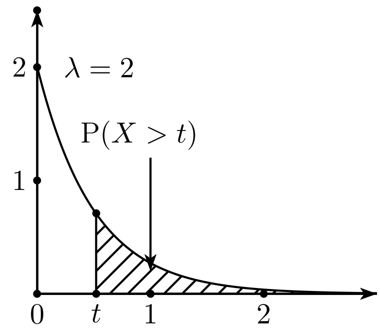
4 Loi exponentielle

1. Définition :
   La variable aléatoire réelle X continue sur l'intervalle $[0;+\infty[$ suit une loi de probabilité exponentielle ou une loi de durée de vie sans vieillissement (de paramètre λ) si la fonction densité de probabilité est :
   $$\boxed{f(x)=\lambda\mathrm{e}^{-\lambda x}}.$$

2. Propriétés :
   Si X suit une loi de probabilité exponentielle de paramètre λ, alors :
   $$\mathrm{P}(0\leqslant X\leqslant t)=1-\mathrm{e}^{-\lambda t}.$$
   $$\mathrm{P}(X>t)=\mathrm{e}^{-\lambda t}.$$
   $$\mathrm{P}(t\leqslant X\leqslant t')=\mathrm{e}^{-\lambda t}-\mathrm{e}^{-\lambda t'}.$$

   Preuve :
   $\mathrm{P}(0\leqslant X\leqslant t)=\int_0^t\lambda\mathrm{e}^{-\lambda x}\mathrm{d}x=\left[-\mathrm{e}^{-\lambda x}\right]_0^t=$ $\qquad\qquad=1-\mathrm{e}^{-\lambda t}$.
   Les deux événements $X>t$ et $0\leqslant X\leqslant t$ sont complémentaires dans $[0;+\infty[$.
   Donc $\mathrm{P}(X>t))=1-\mathrm{P}(0\leqslant X\leqslant t))=1-(1-\mathrm{e}^{-\lambda t})=\mathrm{e}^{-\lambda t}$.



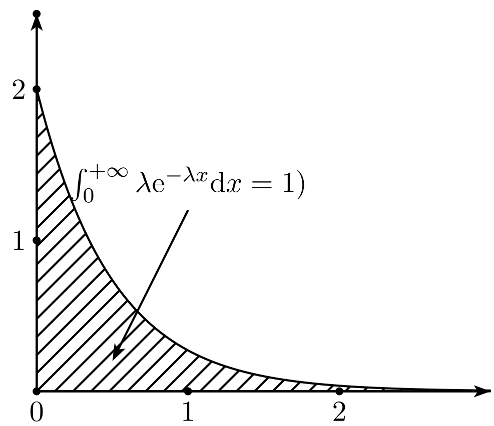


   $\mathrm{P}(t\leqslant X\leqslant t')=$

   Remarque :

   Que signifie $\int_0^{+\infty}\lambda\mathrm{e}^{-\lambda x}\mathrm{d}x$?

   Il s'agit en fait d'une limite d'intégrale :
   a) On calcule d'abord $g(t)=\int_0^t\lambda\mathrm{e}^{-\lambda x}\mathrm{d}x$.
   b) Puis, on calcule $\lim\limits_{t\to+\infty}g(t)$. Si cette limite est finie, par exemple, L, on écrit :
   $$\int_0^{+\infty}\lambda\mathrm{e}^{-\lambda x}\mathrm{d}x=L.$$
   En effet : $\qquad g(t)=\int_0^t\lambda\mathrm{e}^{-\lambda x}\mathrm{d}x=1-\mathrm{e}^{-\lambda t}$.
   Or $\lim\limits_{t\to+\infty}\mathrm{e}^{-\lambda t}=0$.
   Donc $\lim\limits_{t\to+\infty}g(t)=1$ d'où $\int_0^{+\infty}\lambda\mathrm{e}^{-\lambda x}\mathrm{d}x=1$.



   Exemple :
   Soit X une v.a suivant une loi exponentielle de paramètre 4.
   (a) Donner la fonction densité.
   (b) Déterminer $\mathrm{P}(0\leqslant X\leqslant 2)$ et $\mathrm{P}(3\leqslant X\leqslant 4)$.

3. Propriété justifiant le nom de cette loi :

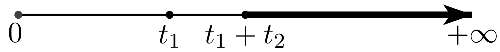
Soit X la variable aléatoire qui suit une loi exponentielle de paramètre λ et t_1 et t_2 deux instants.
Alors la loi de X est sans vieillissement (ou sans mémoire) c'est à dire que :

$$\mathrm{P}_{X \geqslant t1}(X \geqslant t_1 + t_2) = \mathrm{P}(X \geqslant t_2).$$

Ce qui signifie que la probabilité de X ne dépend que de la durée t_2 et pas de t_1.

Preuve :
$\mathrm{P}_{X \geqslant t_1}(X \geqslant t_1 + t_2) = \dfrac{\mathrm{P}((X \geqslant t_1 + t_2) \cap (X \geqslant t_1))}{\mathrm{P}(X \geqslant t_1)}$.

Or $(X \geqslant t_1 + t_2) \cap (X \geqslant t_1) = (X \geqslant t_1 + t_2)$.



$\mathrm{P}_{X \geqslant t_1}(X \geqslant t_1 + t_2) = \dfrac{\mathrm{P}(X \geqslant t_1 + t_2)}{\mathrm{P}(X \geqslant t_1)} = \dfrac{\mathrm{e}^{-\lambda(t_1+t_2)}}{\mathrm{e}^{-\lambda t_1}} = \mathrm{e}^{-\lambda t_2} = \mathrm{P}(X \geqslant t_2)$.

4. Espérance d'une variable aléatoire qui suit une loi exponentielle

Si la variable aléatoire X suit une loi exponentielle de paramètre λ alors l'espérance de X est $\mathrm{E}(X) = \dfrac{1}{\lambda}$.

Preuve exigible au BAC :
La formule de calcul de l'espérance d'une variable aléatoire continue X qui suit une loi de probabilité de densité f est $\mathrm{E}(X) = \int_0^{+\infty} xf(x)\mathrm{d}x$.
Dans le cas particulier de la loi exponentielle, on a : $\mathrm{E}(X) = \int_0^{+\infty} \lambda x\mathrm{e}^{-\lambda x}\mathrm{d}x = \lim\limits_{z \to +\infty} \int_0^z \lambda x\mathrm{e}^{-\lambda x}\mathrm{d}x$.

On doit calculer l'intégrale $\int_0^z \lambda x\mathrm{e}^{-\lambda x}\mathrm{d}x$.

Il faut donc chercher une primitive G pour la fonction g définie par $g(x) = \lambda x\mathrm{e}^{-\lambda x}$.

L'idée : On calcule $g'(x)$.
On trouve : $g'(x) = \lambda\mathrm{e}^{-\lambda x} - \lambda g(x)$. Donc $g(x) = \dfrac{1}{\lambda}(\lambda\mathrm{e}^{-\lambda x} - g'(x))$

Ce qui donne :
$\int_0^z \lambda g(x)\mathrm{d}x = \dfrac{1}{\lambda}\int_0^z(\lambda\mathrm{e}^{-\lambda x} - g'(x))\mathrm{d}x = \dfrac{1}{\lambda}\left[-\mathrm{e}^{-\lambda x} - g(x)\right]_0^z = \dfrac{1}{\lambda}(-\mathrm{e}^{-\lambda z} - \lambda z\mathrm{e}^{-\lambda z} + 1)$.

Or $\lim\limits_{z \to +\infty}(-z\mathrm{e}^{-\lambda z}) = 0$ et $\lim\limits_{z \to +\infty}(\mathrm{e}^{-\lambda z}) = 0$ donc $\mathrm{E}(X) = \dfrac{1}{\lambda}$.

Autre idée : On peut aussi chercher une fonction G sous la forme $G(x) = (mx + n)\mathrm{e}^{-\lambda x}$.

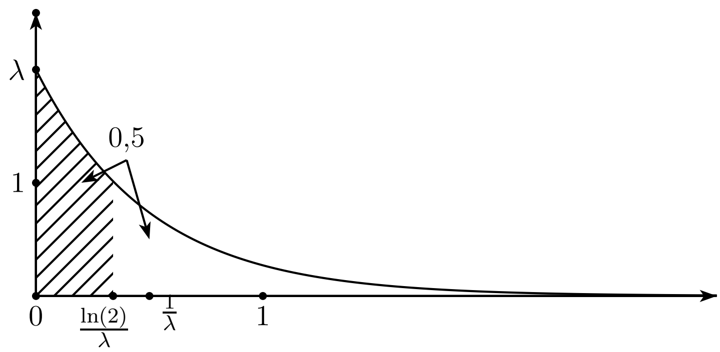
$G'(x) = m\mathrm{e}^{-\lambda x} - \lambda(mx + n)\mathrm{e}^{-\lambda x} = (-\lambda mx - \lambda n + m)\mathrm{e}^{-\lambda x}$.

En identifiant avec l'expression de $g(x)$, on obtient : $m = -1$ et $n = -\dfrac{1}{\lambda}$ donc $G(x) = (-x - \dfrac{1}{\lambda})\mathrm{e}^{-\lambda x}$ ce qui donne :
$\int_0^z \lambda x\mathrm{e}^{-\lambda x}\mathrm{d}x = \left[(-x - \dfrac{1}{\lambda})\mathrm{e}^{-\lambda x}\right]_0^z = (-z - \dfrac{1}{\lambda})\mathrm{e}^{-\lambda z} + \dfrac{1}{\lambda}$.

Exemple :
La durée moyenne de vie d'un téléphone portable est de 3 ans. La durée de vie de cet objet suit une loi exponentielle. Calculer la probabilité que l'objet tombe en panne avant 6 mois.
Solution :
Soit X la variable aléatoire correspondant à la durée de vie du portable. X suit la loi exponentielle de paramètre λ. Comme l'espérance de X est $\dfrac{1}{\lambda}$ et comme la durée moyenne de vie est de 3 ans, on a : $\dfrac{1}{\lambda} = 3$ et donc $\lambda = \dfrac{1}{3}$.
On demande de calculer $\mathrm{P}(X < 0,5)$.
$\mathrm{P}(X < 0,5)$= 1 - $\mathrm{e}^{-\lambda\times 0,5}$ = 1 - $\mathrm{e}^{-\frac{1}{3}\times 0,5} \simeq 0,153$. La probabilité que l'objet tombe en panne avant 6 mois est à peu prés de 0,153.

5. Médiane de la variable aléatoire qui suit une loi exponentielle de paramètre λ

X est la variable aléatoire qui suit une loi exponentielle de paramètre λ. La médiane m est définie par $\mathrm{P}(X < m) = 0{,}5$.
$\mathrm{P}(X < m) = 0{,}5 \iff \int_0^m \lambda \mathrm{e}^{-\lambda x}\mathrm{d}x = 0,5 \iff 1 - \mathrm{e}^{-\lambda m} = 0,5 \iff \mathrm{e}^{-\lambda m} = \dfrac{1}{2} \iff \mathrm{e}^{\lambda m} = 2 \iff \lambda m = \ln(2)$
$\mathrm{P}(X < m) = 0{,}5 \iff \boxed{m = \dfrac{\ln(2)}{\lambda}}$.



Exercice 1 :

La durée de vie, exprimée en heures, d'une ampoule électrique est une variable aléatoire qui suit une loi exponentielle de paramètre λ avec $\lambda > 0$.

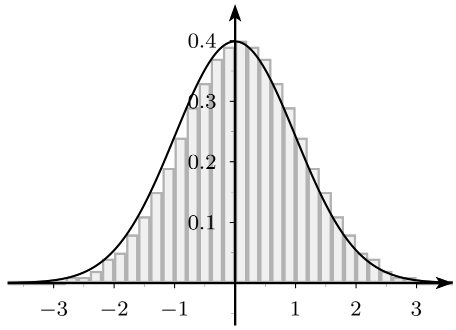
1. Sachant que $P(X \leqslant 1000) = 0,229$, déterminer la valeur exacte de λ, puis en donner une valeur approchée de 10^{-5} près.
2. a Sachant que l'événement $(X > 1000)$ est réalisé, déterminer la probabilité de l'événement $(X > 2500)$.
   b Démontrer que pour tous réels $t \geqslant 0$ et $h \geqslant 0$: $P_{(X>t)}(X \leqslant t + h) = P(X \leqslant h)$.
   c Sachant qu'une ampoule a fonctionné plus de 3000 heures, quelle est la probabilité qu'elle tombe en panne avant 4000 heures ?
3. Déterminer la durée moyenne de vie d'une ampoule électrique (arrondir à l'heure).

Exercice 2 :

Quelle est la probabilité pour qu'un appareil dont la durée de vie suit la loi exponentielle dure plus longtemps que son espérance de vie ?

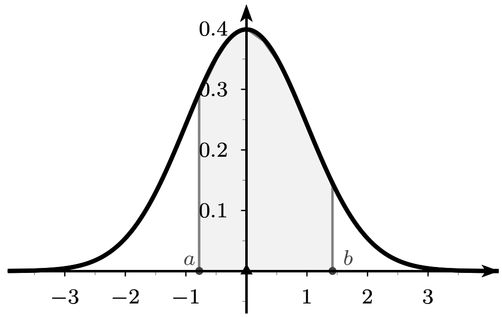
5 Loi normale centrée réduite

Soit X_n une variable aléatoire qui suit une loi binomiale $B(n;p)$.
Si on fixe p et que l'augmente n, l'histogramme représentant les valeurs prises par X_n semble se rapprocher d'une courbe en cloche. Si p varie la courbe en cloche change de caractéristiques c'est à dire d'étalement, de hauteur.



Par contre si on considère la variable aléatoire $Z_n = \dfrac{X_n - np}{\sqrt{npq}}$, on s'aperçoit que quel que soit p la courbe en cloche semble être toujours la même ; c'est ce que dit le théorème ci-dessous de Moivre-Laplace.

Théorème de Moivre-Laplace



X_n est une variable aléatoire qui suit la loi binomiale $B(n,p)$.
On pose $Z_n = \dfrac{X_n - np}{\sqrt{np(1-p)}}$.
Quels que soient les réels a et b avec $a < b$, on a :

$$\lim_{n\to+\infty} P(a \leqslant Z_n \leqslant b) = \int_a^b \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}} \mathrm{d}t.$$

6 La loi N(0 ;1)

Définition et propriété :

La fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(t) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}$ est continue, positive et $\lim\limits_{x\to-\infty} \int_x^0 f(t)\mathrm{d}t = \dfrac{1}{2}$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \int_0^x f(t)\mathrm{d}t = \dfrac{1}{2}$.

Donc f est une fonction de densité sur $\mathbb{R}$. La loi normale N(0 ;1) admet la fonction f précédente comme fonction densité.

Propriété :
Si X est une variable aléatoire qui suit la loi normale centrée réduite N(0 ;1) alors l'espérance de X est 0 et son écart-type est 1.

Remarques :

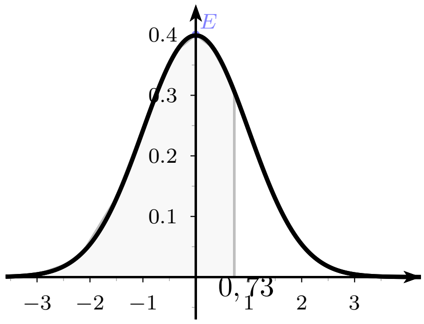
1. On ne connaît pas de primitive qui peut s'écrire à l'aide de fonctions connues, à la fonction $f(t) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}$.
   Donc la plupart des calculs liés à la loi normale sont approchés.
2. Il est conseillé de s'appuyer sur le graphique de la fonction f pour visualiser en termes d'aires les calculs que l'on doit faire avec la loi normale centrée réduite.
3. La fonction f est paire ; donc la courbe représentant f est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.
4. L'aire totale sous la courbe est 1.

Exercice 1 :

X est une variable aléatoire qui suit la loi normale N(0 ;1).

Question 1 : On va chercher sur la calculatrice la probabilité de l'événement $X \leqslant 0,73$.

Il s'agit en fait de savoir combien vaut l'aire ci-contre.
On va diviser l'aire en deux parties : $P(X<0)$ et $P(0<X<0,73)$.
Utilisation des calculatrices pour la loi N(0 ;1)



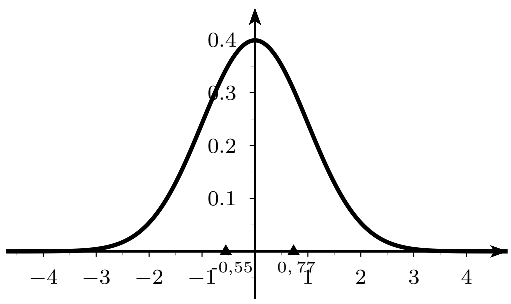
1. Avec Texas Instruments
   Sur TI 83fr : 2ND VARS NormalFRep(0,0.73,0,1) NormalFRep (a,b,μ,σ)
   Sur TI 84 : 2ND VARS Normalcdf(0,0.73,0,1) Normalcdf (a,b,μ,σ)
2. Avec Casio Graph35+
   MENU STAT DIST NormCD(0,0.73,1,0) NormCD(a,b,σ,μ)

On doit obtenir : $P(X<0,73)=P(X<0)+P(0<X<0,73)=0,5+$ .... $=0,7673$.

Question 2 : Déduire de la question précédente et des propriétés du graphique les probabilités suivantes :

$P(X>0,73)=\ldots\ldots$ $P(X\leqslant -0,73)=\ldots\ldots$ $P(X\geqslant -0,73)=\ldots\ldots.$

Question 3 :



1. A l'aide de la calculatrice, donner :

   $P(X\leqslant -0,55)=\ldots\ldots$ $P(X\leqslant 0,77)=\ldots\ldots$.
2. Hachurer sur le dessin ci-contre l'aire permettant de donner $P(-0,55\leqslant X\leqslant 0,77)$
3. En déduire des deux questions précédentes le calcul de :

   $P(-0,55\leqslant X\leqslant 0,77)=\ldots\ldots\ldots\ldots$

Question 4 : On pose $F(t)=P(X\leqslant t$ avec t réel strictement positif.

Exprimer $P(X>-t)$ en fonction de $F(t)$ puis de même $P(X\leqslant -t)$ en fonction de $F(t)$.

$P(X>-t)=\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

$P(X\leqslant -t)=\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

Exercice 2 :

X suit une loi binomiale $B(50;0,6)$. On pose $Y=\dfrac{X-30}{\sqrt{50\times 0,6\times 0,4}}$. On assimile Y à une variable aléatoire suivant une loi $N(0;1)$.

1. Quel théorème permet de justifier l'approximation ?
2. En déduire une valeur approchée de $P(28\leqslant X\leqslant 32)$.

Exercice 3 :

On lance 18000 fois de suite un dé cubique parfait avec les faces numérotées de 1 à 6.

1. Soit X la variable aléatoire égale au nombre de 6 apparus. Donner la loi suivie par X. Calculer son espérance, μ et son écart-type, σ.
2. On admet que la variable aléatoire $Z=\dfrac{X-\mu}{\sigma}$ suit la loi normale $N(0;1)$.
   Montrer que $P(2850\leqslant X\leqslant 3150)=P(-3\leqslant Z\leqslant 2)$ puis donner une valeur approchée au millième de cette

probabilité.

Théorème

Soit X une variable aléatoire suivant la loi normale centrée réduite $N(0;1)$. Pour tout réel $\alpha \in]0;1[$, il existe un unique réel positif u_α) tel que :

$P(-u_\alpha \leqslant X \leqslant u_\alpha) = 1 - \alpha.$

Démonstration exigible

On considère g la fonction définie sur $[0 : +\infty[$ par :

$$g(t) = P(-t \leqslant X \leqslant t) = \int_{-t}^{t} f(x)\mathrm{d}x \qquad \text{où} \qquad f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}.$$

Comme f est paire, on a pour tout réel t positif : $g(t) = 2\int_0^t f(x)\mathrm{d}x$.

Comme f est continue et positive, g est dérivable et de dérivée $2f$ donc g est continue et strictement croissante sur $[0 : +\infty[$.

De plus $g(0) = 0$ et $\lim\limits_{t\to+\infty} g(t) = \lim\limits_{t\to+\infty} 2\int_0^t f(x)\mathrm{d}x = 2 \times \dfrac{1}{2} = 1.$

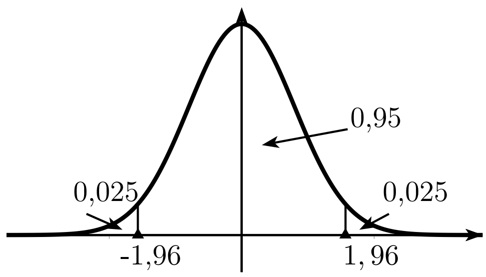
Or comme $\alpha \in]0;1[$, $0 < 1 - \alpha < 1$.

D'après le théorème de la bijection, il existe un seul réel u_α de $[0 : +\infty[$ tel que $g(u_\alpha) = 1 - \alpha$ donc $P(-u_\alpha \leqslant X \leqslant u_\alpha) = 1 - \alpha$.

Cas particuliers :

Pour $\alpha = 0,05$ on a : $u_\alpha \simeq 1,96$

Pour $\alpha = 0,01$ on a : $u_\alpha \simeq 2,58$



Pour chercher k tel que $P(X < k) = \alpha$ où α est connu

Déterminer une valeur approchée de k pour que $P(X \leqslant k) = 0,72$ où X suit la loi normale $N(0;1)$.

1. Avec Texas Instruments
   Sur TI 83fr : 2ND VARS FracNormale(0.72) FracNormale (k)
   Sur TI 84 : 2ND VARS InvNorm(0.72) InvNorm (k)
2. Avec Casio Graph35+
   MENU STAT DIST invNormCD(0.73,1,0) invNormCD(k, σ, μ)

On trouve $k \simeq 0,583$.

Exemple :
Déterminer une valeur approchée de k pour que $P(X \geqslant k) = 0,58$ où X suit la loi normale $N(0;1)$.

$P(X \geqslant k) = 0,58 \iff 1 - P(X < k) = 0,58 \iff P(X < k) = 0,62 \iff k \simeq 0,305.$

Exemple :
Déterminer une valeur approchée de k pour que $P(-k \leqslant X \leqslant k) = 0,43$ où X suit la loi normale $N(0;1)$.

$P(-k \leqslant X \leqslant k) = 2P(X \leqslant k) - 1$ donc le problème devient $2P(X \leqslant k) - 1 = 0,43 \iff P(X < k) = \dfrac{1 + 0,43}{2} \iff k \simeq 0,568.$

7 Loi normale $N(\mu;\sigma^2)$

Définition :

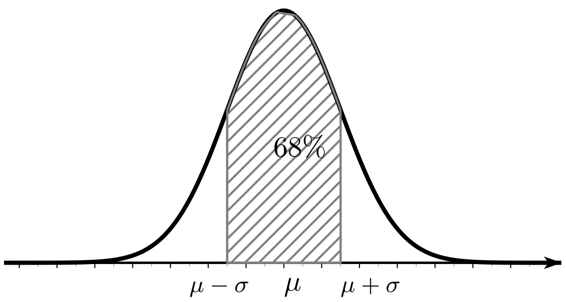
Soit μ un réel et σ un réel strictement positif.

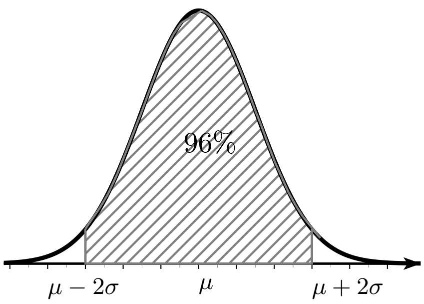
On dit que la variable aléatoire X suit la loi normale $N(\mu;\sigma^2)$ si la variable aléatoire $Z = \dfrac{X-\mu}{\sigma}$ suit la loi normale centrée réduite $N(0;1)$.

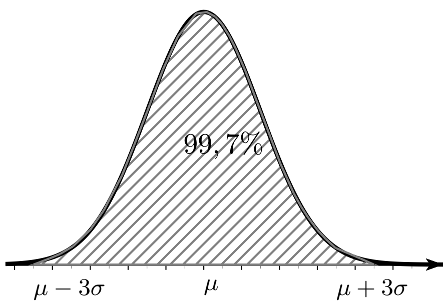
Propriétés :

Si X suit la loi normale $N(\mu;\sigma^2)$ alors

1. L'espérance de X est μ et la variance de X est σ^2.
2. $P(\mu-\sigma \leqslant X \leqslant \mu+\sigma) \simeq 0,683$.
3. $P(\mu-2\sigma \leqslant X \leqslant \mu+2\sigma) \simeq 0,954$.
4. $P(\mu-3\sigma \leqslant X \leqslant \mu+3\sigma) \simeq 0,997$.

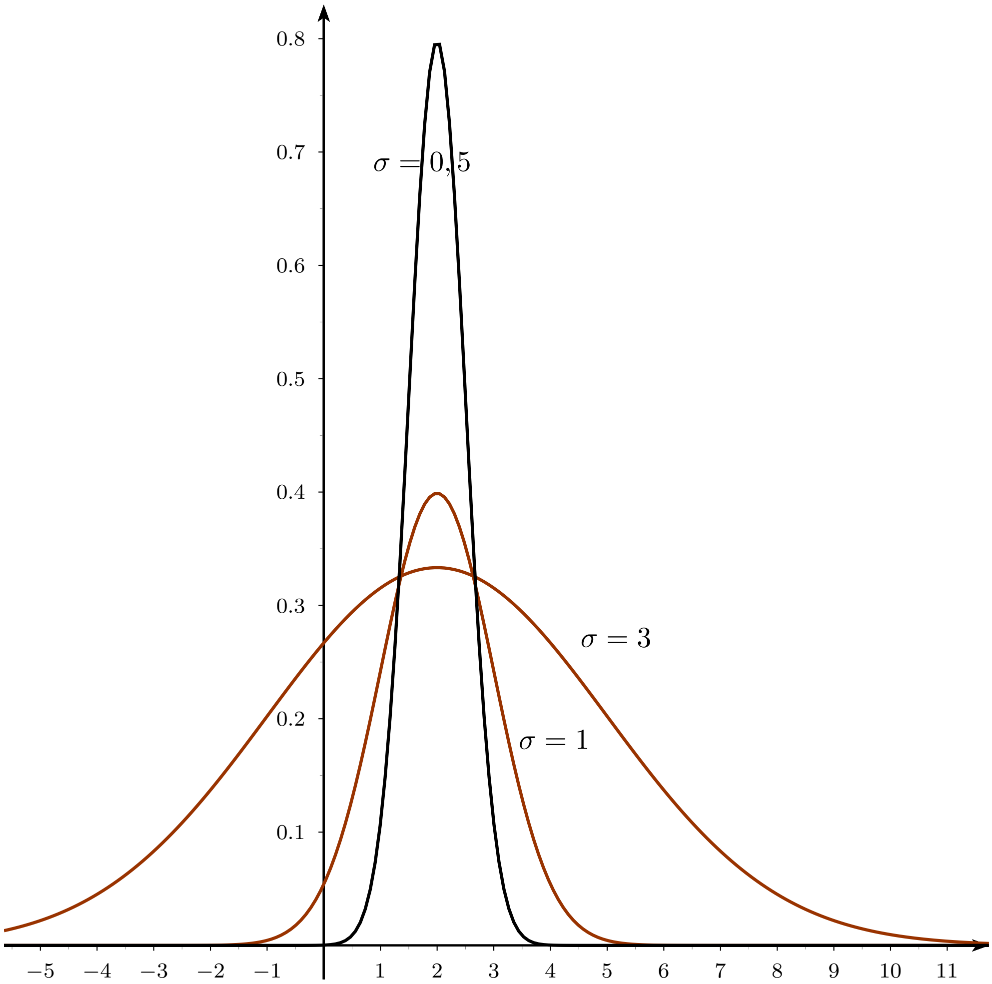






 page 11 page 11

Rôle de l'écart-type σ dans la loi normale $N(\mu, \sigma^2)$



Plus σ est petit, plus la courbe est resserrée autour de la moyenne μ.

Exercice 1

X suit la loi normale $N(15; 2^2)$. On veut donner une valeur approchée à la calculatrice de $P(2 \leqslant X \leqslant 16)$.

1. Avec Texas Instruments
   Sur TI 83fr : 2ND VARS NormalFRep(2,16,15,2) NormalFRep (a, b, μ, σ)
   Sur TI 84 : 2ND VARS Normalcdf(2,16,15,2) Normalcdf (a, b, μ, σ)
2. Avec Casio Graph35+
   MENU STAT DIST NormCD NormCD(2,16,2,15)) NormCD(a, b, σ, μ)

On doit trouver : $P(2 \leqslant X \leqslant 16) \simeq 0,6915$.

Exercice 2

X suit la loi normale $N(15; 4)$.

1. $P(X \leqslant 16) = \dots\dots\dots\dots$
2. $P(10 \leqslant X \leqslant 20) = \dots\dots\dots\dots$
3. Déterminer un intervalle centré en 15 tel que $P(X \in I) \simeq 0,68$.

Exercice 3

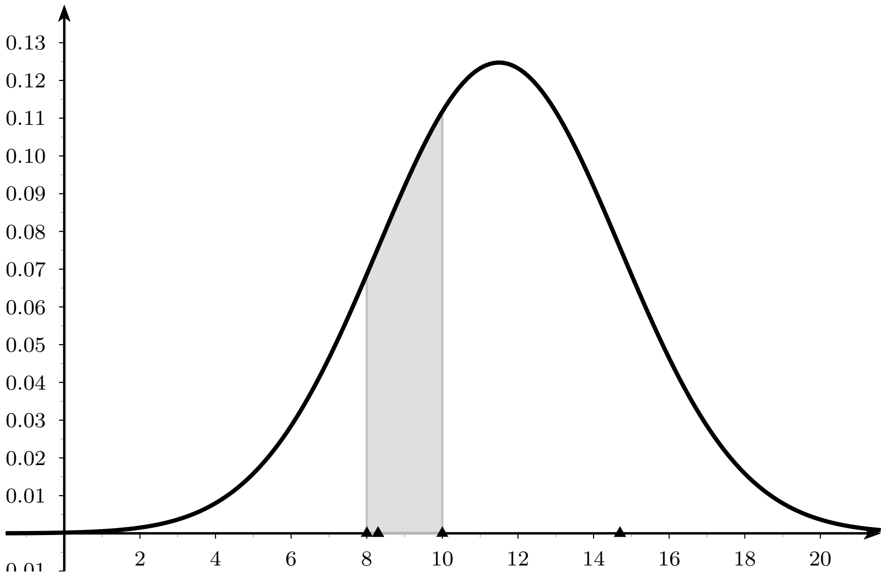
Une machine produit des pièces dont le diamètre D en dixième de millimètres suit une loi $N(155, \sigma^2)$. Une pièce est acceptée si $D \in [152; 158]$.

Quelle est la probabilité qu'une pièce soit acceptée si :

a) $\sigma^2 = 4$ b) $\sigma^2 = 9$ c) $\sigma^2 = 1$.

Exercice 4

Un chercheur a étudié l'âge moyen auquel les premiers mots du vocabulaire apparaissent chez les jeunes enfants. L'étude montre que l'âge X d'apparition (en mois) des premiers mots suit une loi normale de moyenne 11,2 et d'écart-type 3,2.
On a tracé la courbe représentant la densité de la loi $N(11,5; 3,2^2)$. Répondre à chaque question en montrant de quelle aire il s'agit.



1. Donner la probabilité qu'un enfant ait prononcé ses premiers mots entre 8 et 10 mois.
2. Donner la probabilité qu'un enfant ait prononcé ses premiers mots avant 7 mois.
3. Donner la probabilité qu'un enfant ait prononcé ses premiers mots après 10 mois.
4. Déterminer un intervalle I centré autour de la moyenne qui permette d'affirmer : « la probabilité que l'âge d'apparition des premiers mots appartient à I est 95%. »